GIỚI HẠN HÀM SỐ (Tiết 1)

1. Lý thuyết:

Ôn tập lại các định nghĩa, định lí sau :

a) Định nghĩa 1
b) Định lí 1
c) Định nghĩa 2
d) Định lí 2

2. Bài tập :

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

Ví dụ 1. Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa :

$\boldsymbol{A = \lim_{x\to 1}(3x^2 + x + 1)}$ $\boldsymbol{B = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}}$ $\boldsymbol{C = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}}$

Lời giải:

1. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 1$ ta có:

$$A = \lim(3x_n^2 + x_n + 1) = 3 + 1 + 1 = 5$$

2. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 1$ và $x_n \neq 1 \ \ \forall n$ ta có:

$B = \lim\frac{(x_n-1)(x_n^2+x_n+1)}{x_n-1} = \lim(x_n^2 + x_n + 1) = 3.$

3. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 2$ và $x_n \neq 2 \ \ \forall n$ ta có:

$$B = \lim\frac{\sqrt{x_n+2}-2}{x_n-2} = \lim\frac{(x_n-2)}{(x_n-2)\left(\sqrt{x_n+2}+2\right)} = \lim\frac{1}{\sqrt{x_n+2}+2} = \frac{1}{4}$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn:

1. $\boldsymbol{f(x) = \sin\frac{1}{\sqrt{x}}}$ khi $x \to 0$ 2. $\boldsymbol{f(x) = \cos^5 2x}$ khi $x \to -\infty$.

Lời giải:

1. Xét hai dãy $(x_n): x_n = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+n2\pi\right)^2}, (y_n): y_n = \frac{1}{(n\pi)^2}$

Ta có: $\lim x_n = \lim y_n = 0$ và $\lim f(x_n) = 1;\ \lim f(y_n) = 0.$

Nên hàm số không có giới hạn khi $x \to 0$.

2. Tương tự ý 1 xét hai dãy: $x_n = n\pi;\ y_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}$ bằng định nghĩ**A.**

Bài 2 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+1)$ bằng định nghĩ**A.**

Bài 3. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ bằng định nghĩ**A.**

Bài 4 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+3}{x-2}$ bằng định nghĩ**A.**

Bài 5 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^2-x+1}{x+2}$ bằng định nghĩ**A.**

Bài 6 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-1}$ bằng định nghĩ**A.**

Bài 7 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$ bằng định nghĩ**A.**

Vấn đề 2. Tìm giới hạn của hàm số

Bài toán 01: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ biết $f(x)$ xác định tại x_0.

Phương pháp:

* Nếu $f(x)$ là hàm số cho bởi một công thức thì giá trị giới hạn bằng $f(x_0)$

* Nếu $f(x)$ cho bởi nhiều công thức, khi đó ta sử dụng điều kiện để hàm số có giới hạn (Giới hạn trái bằng giới hạn phải).

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+3\cos x+x}{2x+\cos^2 3x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt[3]{x+6}+2x-1}$

Lời giải:

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+3\cos x}{2x+co\ ^2 3x}=\frac{\sin 0+3\cos 0+0}{2.0+\cos^2 0}=3$

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt[3]{x+6}+2x-1}=\frac{\sqrt{2^2+3}-2.2}{\sqrt[3]{2+6}+2.2-1}=\frac{\sqrt{7}-4}{5}$.

Ví dụ 2. Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hay tìm giới hạn đó?

1. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3x+1}{x^2+2} & \text{khi } x<1\\ \frac{3x+2}{3} & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$ khi $x\to 1$;

2. $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x+1 & \text{khi } x\geq 0\\ -x^2+3x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$ khi $x\to 0$

Lời giải:

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3x+2}{3}=\frac{5}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+3x+1}{x^2+2}=\frac{5}{3}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\frac{5}{3}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{5}{3}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2+3x+1)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2+3x+2)=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x\to 0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn hàm số $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x+1}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Bài 2 Tìm giới hạn hàm số $B=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\tan x+1}{\sin x+1}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4\sqrt{3}+6}{9}$ **D.** 1

Bài 3 Tìm giới hạn hàm số $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\sqrt[3]{2}+1$ **D.** 1

Bài 4 Tìm giới hạn hàm số $D=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** -3

Bài 5 Tìm giới hạn hàm số $A=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^2+x+4}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 1

Bài 6 Tìm giới hạn hàm số $B=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin^2 2x-3\cos x}{\tan x}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{9}{2}$ **D.** 1

Bài 7 Tìm giới hạn hàm số $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt[3]{2x+3}}{3x^2-2}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{9}{2}$ **D.** $\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$

Bài 8 Tìm giới hạn hàm số $D=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt[3]{3x+1}-2}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 0

Bài toán 02. Tìm $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x_0)=g(x_0)=0$.

Dạng này ta gọi là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Để khử dạng vô định này ta sử dụng định lí Bơzu cho đa thức:

Định lí: Nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x=x_0$ thì ta có :

$$f(x)=(x-x_0)f_1(x).$$

*Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức thì ta phân tích $f(x)=(x-x_0)f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0)g_1(x)$. Khi đó $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, nếu giới hạn này có dạng $\dfrac{0}{0}$ thì ta tiếp tục quá trình như trên.

<u>**Chú ý :**</u>Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta luôn có sự phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức thì ta nhân lượng liên hợp để chuyển về các đa thức, rồi phân tích các đa thức như trên.

Các lượng liên hợp:

1. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$

2. $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$

3. $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức không đồng bậc ta sử dụng phương pháp tách, chẳng hạn:

Nếu $\sqrt[n]{u(x)},\sqrt[m]{v(x)}\to c$ thì ta phân tích:

$$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-c)-(\sqrt[m]{v(x)}-c).$$

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích như sau: $\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-m(x))-(\sqrt[m]{v(x)}-m(x))$, trong đó $m(x)\to c$.

* Một đẳng thức cần lưu ý:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-5x^3+2x^2+6x-4}{x^3-x^2-x+1}$

<u>Lời giải:</u>

1. Ta có: $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)$

Suy ra: $\dfrac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1$

Do đó: $A=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1\right)=n$.

2. Ta có: $x^5-5x^3+2x^2+6x-4=(x-1)^2(x+2)(x^2-2)$

$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$

Do đó: $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x^2-2)}{x+1}=-\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ **2.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^2(1+3x)^3-1}{x}$

<u>Lời giải:</u>

1. Ta có: $(1+mx)^n=1+mnx+\dfrac{m^2n(n-1)x^2}{2}+m^3x^3.A$

Với $A=C_n^3+mxC_n^4+...+\left(mx\right)^{n-3}C_n^n$

$\left(1+nx\right)^m = 1 + mnx + \frac{n^2m(m-1)x^2}{2} + n^3x^3B$

Với $B = C_m^3 + nxC_m^4 + ... + \left(nx\right)^{m-3}C_m^m$

Do đó: $C = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{m^2n(n-1) - n^2m(m-1)}{2} + x\left(m^3A - n^3B\right)\right]$

$= \frac{m^2n(n-1) - n^2m(m-1)}{2} = \frac{mn(n-m)}{2}$.

2. Ta có: $\frac{\left(1+2x\right)^2\left(1+3x\right)^3 - 1}{x} = \frac{\left(1+2x^2\right)\left[\left(1+3x\right)^3 - 1\right]}{x} +$

$+ \frac{(1+2x)^2 - 1}{x} = \left(1+2x\right)^2\left(9+27x+27x^2\right) - (4+4x)$

Suy ra: $D = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+2x\right)^2\left(9+27x+27x^2\right) - (4+4x)\right] = 5$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4x + 3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 1

Bài 2 Tìm giới hạn $B = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Bài 3 Tìm giới hạn $C = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^3 - (1-4x)^4}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 25

Bài 4 Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 6

Bài 5 Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{n}{m}$ **D.** $m-n$

Bài 6 Tìm giới hạn $B = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*, a \neq 0)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{n}$ **D.** $1-\frac{n}{a}$

Bài 7 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ với $ab\neq 0$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{am}{bn}$ **D.** $1+\frac{am}{bn}$

Bài 8 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}$ với $\alpha\beta\gamma\neq 0$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $B=\frac{\gamma}{4}-\frac{\beta}{3}+\frac{\alpha}{2}$ **D.** $B=\frac{\gamma}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\alpha}{2}$

Bài 9. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Bài 10 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** 1