HÀM SỐ LIÊN TỤC (T1)

1. Các Định nghĩa

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$

1) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 ta nói hàm số gián đoạn tại x_0

- $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó kiên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên $(a;b)$ và

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

VẤN ĐỀ 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Phương pháp:

- Tìm giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ và tính $f(x_0)$
- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ thì ta so sánh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$.

Chú ý:

1. Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì trước hết hàm số phải xác định tại điểm đó

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

3. Hàm số $y = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ k & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$.

4. Hàm số $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \geq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x < x_0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f_2(x) = f_1(x_0)$.

Chú ý:

- Hàm số $y = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ k & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x = x_0$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$.

- Hàm số $y = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x > x_0 \\ g(x) & \text{khi } x \leq x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x = x_0$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x=3$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6} & \text{khi } x\neq 3\\ \dfrac{10}{3} & \text{khi } x=3\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{khi } x<3\\ (x-1)^2 & \text{khi } x\geq 3\end{cases}$

Lời giải:

1. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(3)=\dfrac{10}{3}$ và $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+9}{x+2}=\dfrac{27}{5}\neq f(3)$.

Vậy hàm số không liên tục tại $x=3$.

2. Ta có $f(3)=4$ và $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-1)^2=4$;

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{2x+3}+3}{2}=3\neq\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=3$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\neq 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-x-2|}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ 1 & \text{khi } x=-1\end{cases}$

Lời giải:

1. Ta có $f(1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2=f(1)$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

2. Ta có $f(-1)=1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}(2-x)=3$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-2)=-3\neq\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Suy ra không tồn tại giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to -1$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=-1$.

Ví dụ 3 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x=2$

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} & \text{khi } x<2\\ ax^2+x+1 & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$

Lời giải:

1. Ta có $f(2)=a$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{\sqrt[3]{(4x)^2}+2\sqrt[3]{4x}+4}=\dfrac{1}{3}$

Hàm số liên tục tại điểm $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$.

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax^2+x+1\right)=4a+3=f(2)$

Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

$\Leftrightarrow 4a+3=1\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=4\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x=4$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trên tập xác định nhưng gián đoạn tại $x=4$

C. Hàm số không liên tục tại $x=4$

D. Tất cả đều sai

Bài 2 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}+2 & \text{khi } x>1\\ 3x^2+x-1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x=1$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục tại $x=1$

D. Tất cả đều sai

Bài 3 Cho hàm số **3.** $f\left(x\right)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ |x-1| & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại tại $x=1$ và $x=-1$.

B. Hàm số liên tục tại $x=1$, không liên tục tại điểm $x=-1$.

C. Hàm số không liên tục tại tại $x=1$ và $x=-1$.

D. Tất cả đều sai

Bài 4. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$ liên tục tại điểm $x=0$.

A.1 **B.**2 **C.**3 **D.**4

Bài 5. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}-2}{\sqrt{3x+4}-2}$ liên tục tại điểm $x=0$.

A.1 **B.**2 **C.**$\dfrac{2}{9}$ **D.**$\dfrac{1}{9}$

Bài 6 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ 2x+3 & \text{khi } x\le -1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại tại tại $x_0=-1$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục tại tại $x_0=-1$..

D. Tất cả đều sai

Bài 7 Cho hàm số **3.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ 2 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x_0=0$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm như gián đoạn tại $x_0=0$

C. Hàm số không liên tục tại $x_0=0$

D. Tất cả đều sai

Bài 8 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ \dfrac{1}{3} & \text{khi } x=1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x=1$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục tại tại $x=1$

D. Tất cả đều sai

VẤN ĐỀ 2. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT TẬP

Phương pháp: Sử dụng các định lí về tính liên tục của hàm đa thức, lương giác, phân thức hữu tỉ …

Nếu hàm số cho dưới dạng nhiều công thức thì ta xét tính liên tục trên mỗi khoảng đã chia và tại các điểm chia của các khoảng đó.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên toàn trục số:

1. $f(x)=\tan 2x+\cos x$ **2.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{x^2-3x+2}$

Lời giải:

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Vậy hàm số liên tục trên D

2. Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-1\ge 0\\ x^2-3x+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x\ne 2\end{cases}$

Vậy hàm số liên tục trên $(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ví dụ 2 Xác định a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x<2\\ (1-a)x & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải:

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Với $x<2\Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x>2\Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x=2$ ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(1-a)x=2(1-a)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}a^2(\sqrt{x+2}+2)=4a^2$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\Leftrightarrow 4a^2=2(1-a)\Leftrightarrow a=-1,a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a=-1,a=\dfrac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. TXĐ : $D=\mathbb{R}\backslash\{3;-2\}$.Ta có hàm số liên tục tại mọi $x\in D$ và hàm số gián đoạn tại $x=-2,x=3$

C. Hàm số liên tục tại $x=-2,x=3$

D. Tất cả đều sai

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

C. TXĐ : $D=\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$

D. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=2\sin x+3\tan 2x$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Bài 4. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & khi\, x<2\\ 2-x & khi\ x\geq 2\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục trên $\left(2:+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=2$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1\\ \frac{\sqrt[3]{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(1:+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=1$.

Bài 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\left|x-1\right|}\; khi\, x\neq 1\\ a\;\; khi\;\; x=1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(1:+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=1$.

Bài 7. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}\; khi\, x\neq 0\\ 0\;\; khi\;\; x=0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=0$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x\leq 0\\ (x-1)^3 & \text{khi } 0<x<2\\ \sqrt{x}-1 & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(2;+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=2$.