

HÀM SỐ LIÊN TỤC (tiết 2)

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

1. Xét tính liên tục của hàm số dạng:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \neq x_0) \\ a & (x = x_0) \end{cases}$$

- Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)]$. Hàm số liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)] = a$.

2. Xét tính liên tục của hàm số dạng: $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x < x_0) \\ a & (x = x_0) \\ h(x) & (x > x_0) \end{cases}$

- Tìm : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0^-} [g(x)] \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} [h(x)] \\ f(x_0) \end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x = x_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0^-} [f(x)] = f(x_0) = a.$$

3. Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

- Chứng tỏ $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

- Chứng tỏ $f(a) \cdot f(b) < 0$

Khi đó $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a; b)$.

Nếu chưa có $(a; b)$ thì ta cần tính các giá trị $f(x)$ để tìm a và b . Muốn chứng minh $f(x) = 0$ có hai, ba nghiệm thì ta tìm hai, ba khoảng rời nhau và trên mỗi khoảng $f(x) = 0$ đều có nghiệm.

B. CÁC VÍ DỤ.

1. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ a & (x = 1) \end{cases}$ a là hằng số. Xét tính liên tục

của hàm số tại $x_0 = 1$.

Giải

Hàm số xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} .

Ta có $f(1) = a$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Nếu $a = 2$ thì hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

Nếu $a \neq 2$ thì hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$.

2. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x > 0) \\ x & (x \leq 0) \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 0$.

Giải

Hàm số xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} .

Ta có $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x$$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0 = 0$.

3. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & (x \geq 1) \\ x^2 + x - 1 & (x < 1) \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên toàn trục số.

Giải

$x > 1$ ta có $f(x) = ax + 2$ hàm số liên tục.

$x < 1$ ta có $f(x) = x^2 + x - 1$ hàm số liên tục.

Khi $x = 1$:

Ta có $f(1) = a + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 2) = a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x - 1) = 1$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ nếu $a = -1$.

Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$ nếu $a \neq -1$.

Vậy hàm số liên tục trên toàn trục số nếu $a = -1$. Hslt trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ nếu $a \neq -1$.

4. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^3 - 5x^2 + 7 = 0$

b) $x^5 + x - 3 = 0$

LỜI GIẢI

a). Đặt $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$. Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Vì $f(x)$ là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có $f(-1) = -1 - 5 \cdot 1 + 7 = 1$ và $f(-2) = -21$, nên suy ra $f(-1)f(-2) = -21 < 0$ với mọi m . Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0 \in (-2; -1)$ với mọi m .

b). Đặt $f(x) = x^5 + x - 3$. Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Vì $f(x)$ là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có $f(1) = -1$ và có $f(2) = 31$, nên suy ra $f(1)f(2) = 31 \cdot (-1) = -31 < 0$ với mọi m .

Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $n_0 \in (1; 2)$ với mọi m .

5. Chứng minh các phương trình sau có ít nhất hai nghiệm:

$$4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$$

LỜI GIẢI

Đặt $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$. Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Vì $f(x)$ là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Ta có $f(0) = -3, f(-1) = 4, f(1) = 2$

Vì $f(1)f(0) = -12 < 0, \forall m \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có ít nhất 1 nghiệm $\in (-1; 0)$ (2)

Vì $f(0)f(1) = -6 < 0 \forall m \Rightarrow$ phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm $\in (0; 1)$ (3)

Từ (2), (3) \Rightarrow phương trình (1) luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{neu } x \neq 1 \\ a & \text{neu } x = 1 \end{cases}$ để $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ thì a bằng?

- A. 0 B. +1 C. 2 D. -1

Câu 2: cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{neu } x > 0 \\ x & \text{neu } x \leq 0 \end{cases}$ trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ C. $f(0) = 0$ D. f liên tục tại $x_0 = 0$

Câu 3: cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{neu } x \geq 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{neu } x < 1 \end{cases}$ để $f(x)$ liên tục trên toàn trục số thì a bằng?

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$. Xét phương trình: $f(x) = 0$ (1) trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai?

- A. (1) có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$ B. (1) có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$
C. (1) có nghiệm trên \mathbb{R} D. Vô nghiệm

Câu 5: Cho các hàm số: (I) $y = \sin x$; (II) $y = \cos x$; (III) $y = \tan x$; (IV) $y = \cot x$

Trong các hàm số sau hàm số nào liên tục trên \mathbb{R}

- A. (I) và (II) B. (III) và (IV) C. (I) và (III) D. (I), (II), (III) và (IV)

Câu 6: cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{neu } x \neq 4 \\ a & \text{neu } x = 4 \end{cases}$ để $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 4$ thì a bằng?

- A. 1 B. 4 C. 6 D. 8

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ chưa xác định tại $x = 0$: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$.

Để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$, phải gán cho $f(0)$ giá trị bằng bao nhiêu?

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ chưa xác định tại $x = 0$: $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2}$.

Để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$, phải gán cho $f(0)$ giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 9: cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{neu } x \leq 2 \\ x^2 + x - 1 & \text{neu } x > 2 \end{cases}$ để $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thì a bằng?

- A. 2 B. 4 C. 3 D. Đáp án khác

Câu 10: Cho phương trình $3x^3 + 2x - 2 = 0$. Xét phương trình: $f(x) = 0$ (1) trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

- A. (1) Vô nghiệm B. (1) có nghiệm trên khoảng $(1; 2)$

C. (1) có 4 nghiệm trên \mathbb{R}

D. (1) có ít nhất một nghiệm

Câu 11. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. Hàm số có giới hạn tại điểm $x = a$ thì liên tục tại $x = a$.

B. Hàm số có giới hạn trái tại điểm $x = a$ thì liên tục tại $x = a$.

C. Hàm số có giới hạn phải tại điểm $x = a$ thì liên tục tại $x = a$.

D. Hàm số có giới hạn trái và phải tại điểm $x = a$ bằng nhau thì liên tục tại $x = a$.

Câu 12: Cho một hàm số $f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì hàm số liên tục trên $(a; b)$.

B. Nếu hàm số liên tục trên $(a; b)$ thì $f(a)f(b) < 0$.

C. Nếu hàm số liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên $(a; b)$

D. Cả ba khẳng định trên đều sai.

Câu 13: Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Khẳng định nào đúng:

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.

D. Phương trình có ít nhất nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Câu 14: Khẳng định nào đúng:

A. Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên \mathbb{R} .

B. Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ liên tục trên \mathbb{R} .

C. Hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ liên tục trên \mathbb{R} .

D. Hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục trên \mathbb{R} .

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & x < 1, x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng:

A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[0; 1]$.

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc \mathbb{R} .

C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.

D. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{4x+8} & x \neq -2 \\ 3 & x = -2 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng:

- A. Hàm số không liên tục trên \mathbb{R} .
- B. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc \mathbb{R} .
- C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -2$.
- D. Hàm số chỉ liên tục tại điểm $x = -2$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x+2}{x-2} & x \geq 2 \\ 3x-5 & x < 2 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng:

- A. Hàm số chỉ liên tục tại điểm $x = 3$
- B. Hàm số chỉ liên tục trái tại $x = 2$.
- C. Hàm số chỉ liên tục phải tại $x = 2$.
- D. Hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sai:

- A. Hàm số liên tục phải tại điểm $x = 1$.
- B. Hàm số liên tục trái tại điểm $x = 1$.
- C. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc \mathbb{R} .
- D. Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & x = \sqrt{2} \end{cases}$. Khẳng định nào sai:

- A. Hàm số gián đoạn tại điểm $x = \sqrt{2}$.
- B. Hàm số liên tục trên khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.
- C. Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; \sqrt{2})$.
- D. Hàm số liên tục trên \mathbb{R} .

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{(x-2)^2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sai:

- A. Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 2$.
- B. Hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- D. Hàm số liên tục trên \mathbb{R} .

Câu 21. Tìm m để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m-2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên \mathbb{R}

A. $m = 1$

B. $m = \frac{4}{3}$

C. $m = 2$

D. $m = 0$

Câu 22: Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & x < 2 \\ mx + m + 1 & x \geq 2 \end{cases}$ liên tục trên \mathbb{R} nếu m bằng:

A. 6

B. -6

C. $-\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{6}$

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 1000x^2 + 0,01$. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

I. $(-1;0)$. II. $(0;1)$. III. $(1;2)$.

A. Chỉ I.

B. Chỉ I và II.

C. Chỉ II.

D. Chỉ III.

Câu 24. Tìm m để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2 + 3m + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên \mathbb{R}

A. $m = 1$

B. $m = -\frac{1}{6}$

C. $m = 2$

D. $m = 0$

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}, x \neq \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}, x = \sqrt{3} \end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

sau:

(I). $f(x)$ liên tục tại $x = \sqrt{3}$.

(II). $f(x)$ gián đoạn tại $x = \sqrt{3}$.

(III). $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

A. Chỉ (I) và (II).

B. Chỉ (II) và (III).

C. Chỉ (I) và (III).

D. Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, x > 1 \\ x^2 + 3, x < 1 \\ k^2, x = 1 \end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

A. $k \neq \pm 2$.

B. $k \neq 2$.

C. $k \neq -2$.

D. $k \neq \pm 1$.

Câu 27. Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{6}$

D. 1

Câu 28. Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. 1

Câu 29. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục với mọi $x \neq 1$.

(II). $f(x) = \sin x$ liên tục trên \mathbb{R} .

(III). $f(x) = \frac{|x|}{x}$ liên tục tại $x=1$.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (I) và (II). **C.** Chỉ (I) và (III). **D.** Chỉ (II) và (III).

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{9-x}}{x}, & 0 < x < 9 \\ m, & x = 0 \\ \frac{3}{x}, & x \geq 9 \end{cases}$. Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$

là.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. 1.