GIỚI HẠN HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

1.1. Giới hạn hàm số: Cho khoảng K chứa điểm x_0. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ xác định trên K (có thể trừ điểm x_0) có giới hạn là L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K\backslash\{x_0\}$ và$x_n \to x_0$, ta có:$f(x_n) \to L$. Ta kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{hay } f(x) \to L \text{ khi} x \to x_0.$$

1.2.Giới hạn một bên:

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên$(x_0; b)$ .Số L gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n): x_0 < x_n < b$ mà $x_n \to x_0$ thì ta có:$f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên$(a; x_0)$.Số L gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n): a < x_n < x_0$ mà $x_n \to x_0$ thì ta có:$f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Chú ý: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

1.3. Giới hạn tại vô cực

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$ có giới hạn là L khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; b)$ có giới hạn là L khi $x \to -\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n < b$ và $x_n \to -\infty$ thì$f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

1.4.Giới hạn vô cực

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn dần tới dương vô cực khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n \to x_0$ thì$f(x_n) \to +\infty$. Kí hiệu: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

* Tương tự ta cũng có định nghĩa giới hạn dần về âm vô cực

* Ta cũng có định nghĩa như trên khi ta thay x_0 bởi $-\infty$ hoặc$+\infty$.

2. Các định lí về giới hạn

***Định lí 1**:* Gới hạn của tổng, hiệu, tích, thương (mẫu số dẫn về$L \neq 0$) khi $x \to x_0$ (hay$x \to +\infty; x \to -\infty$) bằng tổng, hiệu, tích, thương của các giới hạn đó khi $x \to x_0$ (hay$x \to +\infty; x \to -\infty$) .

Chú ý: Định lí trên ta chỉ áp dụng cho những hàm số có giới hạn là hữu hạn. Ta không áp dụng cho các giới hạn dần về vô cực

Định lí 2: (Nguyên lí kẹp)

Cho ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên Kchứa điểm x_0 (có thể các hàm đó không xác định tại x_0). Nếu $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \;\; \forall x \in K$và $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$ thì $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

3. Một số gới hạn đặc biệt

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} x^{2k} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} x^{2k+1} = +\infty \; (-\infty)$

$* \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{k}{f(x)} = 0\ \ (k \neq 0).$

BÀI TOÁN 03: TÌM $B = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, TRONG ĐÓ $f(x), g(x) \to \infty$, DẠNG NÀY TA CÒN GỌI LÀ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$.

Phương pháp: Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

$* \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} x^{2k} = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} x^{2k+1} = +\infty\ (-\infty).$

$* \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{k}{x^n} = 0\ \ (n > 0; k \neq 0).$

$* \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{k}{f(x)} = 0\ \ (k \neq 0).$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

$\mathbf{1.}A = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$ $\quad\quad$ $\mathbf{2.}B = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3x+4}+3x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

Lời giải:

1. Ta có: $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(4+\frac{1}{x}\right)^3\left(2+\frac{1}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x}+2\right)^7} = 8$

2. Ta có: $B = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+3}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

$\mathbf{1.}A = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{2x+2}$ $\quad\quad$ $\mathbf{2.}B = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

Lời giải:

1. Ta có: $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

2. Ta có: $B = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{|x|}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{|x|}\right)} = \sqrt{3}$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn $C = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$:

A. $+\infty$ $\quad$ **B.** $-\infty$ $\quad$ **C.** $\frac{2-\sqrt{3}}{6}$ $\quad$ **D.** 0

Bài 2 Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$:

A. $+\infty$ $\quad$ **B.** $-\infty$ $\quad$ **C.** $\frac{4}{3}$ $\quad$ **D.** 1

Bài 3 Tìm giới hạn $E = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$:

A.$+\infty$ **B.**$-\infty$

Bài 4 Tìm giới hạn $F = \lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{4x^2 + 1} - x)$:

A.$+\infty$ **B.**$-\infty$ **C.**$\frac{4}{3}$ **D.** 0

Bài 5 Tìm giới hạn $M = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$:

A.$+\infty$ **B.**$-\infty$ **C.**$\frac{4}{3}$ **D.** Đáp án khác

BÀI TỰ LUẬN

Bài 6 Tìm giới hạn $N = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3 + 2x} - 2x\right)$

Bài 7 Tìm giới hạn $H = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2}\right)$

BÀI TOÁN 04: DẠNG VÔ ĐỊNH: $\infty - \infty$ VÀ $0.\infty$

Phương pháp:

Những dạng vô định này ta tìm cách biến đổi đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:$A = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + \sqrt{x^2 - 2x})$

Lời giải.

Ta có: $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + \sqrt{x^2 - 2x} = (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x) + (\sqrt{x^2 - 2x} + x)$

$$= \frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3-3x^2} + x^2} + \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x} - x}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{x})^2} + \sqrt[3]{1-\frac{3}{x}} + 1} + \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}} - 1} = 0.$$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn sau: $B = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$

Lời giải:

Ta có: $\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x = \frac{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}-4x^2-4x}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$$= 2x\frac{\sqrt{x^2+2x}-x-1}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \frac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}.$$

$$\Rightarrow B = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$B = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x})} = -\frac{1}{4}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right)$:

A.$+\infty$ **B.**$-\infty$ **C.**$-\frac{1}{2}$ **D.** 0

Bài 2 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 0

Bài 3 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}-x\right]$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ **D.** $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2n}$

Bài 4 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 0

Bài 5 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 0

BÀI TỰ LUẬN

Bài 6 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

Bài 7 Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x\right)$

BÀI TOÁN 05: DẠNG VÔ ĐỊNH CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

Phương pháp:

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

• $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$, từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$.

• Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\tan u(x)}{u(x)}=1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

Lời giải:

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}.\frac{x^2}{\sin^2 x}$

Mà: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}.\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}.\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1}=\frac{1}{6}$$

Do đó: $A=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}}{\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}}$

Mà: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+x+1}+\lim_{x\to0}\frac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$$

$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos 2x}} = 1$$

Vậy $B = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $\boldsymbol{A = \lim_{x \to 0} x^3 \sin \frac{1}{x^2}}$ **2.** $\boldsymbol{B = \lim_{x \to +\infty} (2 \sin x + \cos^3 x)\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)}$

Lời giải:

1. Ta có: $0 \leq \left| x^3 \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq x^3$

Mà $\lim_{x \to 0} x^3 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \left| x^3 \sin \frac{1}{x^2} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x^3 \sin \frac{1}{x^2} = 0$

Vậy $A = 0$.

2. Ta có: $B = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \sin x + \cos^3 x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

Mà: $0 \leq \left| \frac{2 \sin x + \cos^2 x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right| \leq \frac{3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \to 0$ khi $x \to +\infty$.

Do đó: $B = 0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn $A = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** 0

Bài 2 Tìm giới hạn $A = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \sin mx - \cos m}{1 + \sin nx - c}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{m}{n}$ **D.** 0

Bài 3 Tìm giới hạn $B = \lim_{x \to 0} \frac{1 - co \quad . \cos \quad . \cos}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 0

Bài 4 Tìm giới hạn $A = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos}{2 \sin \frac{3x}{2}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 1 **D.** 0

Bài 5 Tìm giới hạn $B = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos 3}{x(\sin 3x - \sin 4x)}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 0

BÀI TỰ LUẬN

Bài 6 Tìm giới hạn $C = \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \sqrt[3]{\cos 2x}}$:

Bài 7 Tìm giới hạn $D = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin 3x} - \cos 2}$