

GIỚI HẠN HÀM SỐ (Tiết 2)

1. Lý thuyết:

Ôn tập lại các định nghĩa, định lí sau :

- a) Định nghĩa 2
- b) Định lí 2
- c) Định nghĩa 3

Giới hạn tại vô cực

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; b)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n < b$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

2. Bài tập :

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 4} + 3x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

Lời giải:

$$1. \text{ Ta có: } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{x}\right)^3 \left(2 + \frac{1}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x} + 2\right)^7} = 8$$

$$2. \text{ Ta có: } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + 3}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{2x + 2}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

Lời giải:

$$1. \text{ Ta có: } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x(2 + \frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2 + \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

$$2. \text{ Ta có: } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{3 - \frac{2}{x^2}} + |x| \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{3 - \frac{2}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|} \right)} = \sqrt{3}$$

Ví dụ 3. Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hãy tìm giới hạn đó?

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x^2+2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{3x+2}{3} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 1;$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 0$$

Lời giải:

$$1. \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+2}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+3x+1}{x^2+2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{5}{3}.$$

$$2. \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + 3x + 1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Vậy hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \rightarrow 0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

$$\text{Bài 1} \text{ Tìm giới hạn } C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{3x^2 + 2}}{5x + \sqrt{x^2 + 1}} :$$

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{2-\sqrt{3}}{6}$

D. 0

$$\text{Bài 2} \text{ Tìm giới hạn } D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}} :$$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{4}{3}$ D. 1

Bài 3 Tìm giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 0

Bài 4 Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{4}{3}$ D. Đáp án khác

Bài 5 Tìm giới hạn $N = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x} - 2x)$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{4}{3}$ D. 0

Bài 6 Tìm giới hạn $H = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2})$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{4}{3}$ D. 0

Bài 7 Tìm giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x} - 2x)$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 0

Bài 8 Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{2x^2 + x + 1}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{3}{2}$ D. 0

Bài 9 Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3 + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1}}{\sqrt[4]{4x^4 + 2}}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $-\frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ D. 0

Bài 10. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1)^3 (x + 2)^4}{(3 - 2x)^7}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $-\frac{1}{16}$ D. 0

Bài 11. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 4} - 2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 2 D. 0

Bài 12 Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{3x^2 + 2}}{5x - \sqrt{x^2 + 1}}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ D. 0

Bài 13. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + x^4 + x^6}}{\sqrt{1 + x^3 + x^4}}$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{4}{3}$ D. -1

Bài 14 Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x)$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1}{2}$ D. 0

Bài 15. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1})$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $-\frac{1}{6}$ D. 0

ĐỀ BÀI TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi $x \rightarrow 2$ $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Bài.2 Tìm a để hàm số sau có giới hạn tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 5ax^2 + 3x + 2a + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 + x + \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Bài 3 Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} 5ax^2 + 3x + 2a + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 + x + \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có giới hạn tại $x \rightarrow 0$

Bài 4 Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 1 \\ 2x^2 - x + 3a & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$.