

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

1. Quy tắc tính đạo hàm

Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hàm số

$$\bullet (u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \dots \pm u_n' \quad \bullet (k.u(x))' = k.u'(x)$$

$$\bullet (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw' \quad \bullet (u^n(x))' = nu^{n-1}(x).u'(x)$$

$$\bullet \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} \quad \bullet \left(\frac{c}{u(x)}\right)' = -\frac{c.u'(x)}{u^2(x)}$$

2. Bảng công thức đạo hàm các hàm sơ cấp cơ bản

| Đạo hàm | Hàm hợp |
|---|--|
| $(c)' = 0$ | $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$ |
| $(x)' = 1$ | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ | $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ |
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | |
| $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | |

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

2. $y = -x^3 + 3x + 1$

3. $y = \frac{x^4}{4} - x^2 + 1$

4. $y = -2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

5. $y = \frac{2x+1}{x-3}$

6. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$

Lời giải:

1. Ta có: $y' = (-x^3 + 3x + 1)' = 3x^2 - 6x + 2$

2. Ta có: $y' = (-x^3 + 3x + 1)' = -3x^2 + 3$

3. Ta có: $y' = \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 1\right)' = x^3 - 2x$

4. Ta có: $y' = \left(-2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1\right)' = -8x^3 + 3x$

5. Ta có: $y' = \frac{(2x+1)'(x-3) - (x-3)'(2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$

6. Ta có: $y' = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x+1) - (x^2 - 2x + 2)(x+1)'}{(x+1)^2}$
 $= \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}$.

Nhận xét: Với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta có: $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $f'(x) \geq 0$ biết:

1. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

2. $f(x) = x - 2\sqrt{x^2+12}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1}$

4. $f(x) = \sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x}$

Lời giải:

1. TXĐ: $D = [-2; 2]$

Ta có: $f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

Do đó: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

2. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2+12}} = \frac{\sqrt{x^2+12} - 2x}{\sqrt{x^2+12}}$

Suy ra: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12} \geq 2x$ (1)

- Với $x < 0$ thì (1) luôn đúng
- Với $x \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 12 \geq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

Vậy bất phương trình $f'(x) \geq 0$ có nghiệm $x \leq 2$.

3. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-2x)\sqrt{x^2+x+1} = (1+2x)\sqrt{x^2-x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-2x)(1+2x) \geq 0 \\ (1-2x)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] = (1+2x)^2 \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (1-2x)^2 = (1+2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

4. TXĐ: $D = [0; +\infty)$

Ta có: $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} \geq \sqrt[4]{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow x^6 \geq (x^2+1)^3$$

$\Leftrightarrow x^2 \geq x^2 + 1$ bất phương trình này vô nghiệm

Ví dụ 3. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y = \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$

2. $y = \sqrt[5]{\sqrt{2x^2 + 1} + 3x + 2}$

Lời giải:

1. Ta có: $y' = \frac{(2x^2 + 3x + 1)'}{2\sqrt{2x^2 + 3x + 1}} = \frac{4x + 3}{2\sqrt{2x^2 + 3x + 1}}$.

2. Ta có $y' = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{(\sqrt{2x^2 + 1} + 3x + 2)^4}} (\sqrt{2x^2 + 1} + 3x + 2)'$
 $= \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{(\sqrt{2x^2 + 1} + 3x + 2)^4}} \left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} + 3 \right).$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm các hàm số sau :

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{khi } x > 1 \\ 2x + 2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$

Lời giải:

1. Với $x > 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3$

Với $x < 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2$

Với $x = 1$ ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 1) = -1 \neq f(1) \Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x = 1$, suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$

Vậy $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x > 1 \\ 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tính đạo hàm các hàm số sau

Câu 1. $y = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

A. $y' = 4x^3 - 6x + 3$ B. $y' = 4x^4 - 6x + 2$ C. $y' = 4x^3 - 3x + 2$ D. $y' = 4x^3 - 6x + 2$

Câu 2. $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 1$

A. $y' = -2x^2 + 4x + 1$ B. $y' = -3x^2 + 4x + 1$ C. $y' = -\frac{1}{3}x^2 + 4x + 1$ D. $y' = -x^2 + 4x + 1$

Câu 3. $y = \frac{2x+1}{x+2}$

A. $-\frac{3}{(x+2)^2}$ B. $\frac{3}{(x+2)}$ C. $\frac{3}{(x+2)^2}$ D. $\frac{2}{(x+2)^2}$

Câu 4. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

A. $\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ B. $\frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ C. $\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ D. $\frac{-2x - 2}{(x-1)^2}$

Câu 5. $y = \frac{ax+b}{cx+d}, ac \neq 0$

A. $\frac{a}{c}$ B. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ C. $\frac{ad+bc}{(cx+d)^2}$ D. $\frac{ad-bc}{(cx+d)}$

Câu 6. $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}, aa' \neq 0.$

A. $\frac{aa'x^2 + 2ab'x + bb' - a'c}{(a'x + b')}$ B. $\frac{aa'x^2 + 2ab'x + bb' - a'c}{(a'x + b')^2}$

C. $\frac{aa'x^2 - 2ab'x + bb' - a'c}{(a'x + b')^2}$ D. $\frac{aa'x^2 + 2ab'x - bb' - a'c}{(a'x + b')^2}$

Bài 2 Tính đạo hàm các hàm số sau

Câu 1. $y = x\sqrt{x^2 + 1}$

A. $\frac{2x^2 + 1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$ B. $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ C. $\frac{4x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ D. $\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Câu 2. $y = \frac{3}{(2x+5)^2}$

A. $-\frac{12}{(2x+5)^4}$

B. $\frac{12}{(2x+5)^3}$

C. $-\frac{6}{(2x+5)^3}$

D. $-\frac{12}{(2x+5)^3}$

Câu 3. $y = \frac{2-2x+x^2}{x^2-1}$

A. $\frac{2x^2+6x+2}{(x^2-1)^2}$

B. $\frac{2x^2-6x+2}{(x^2-1)^4}$

C. $\frac{2x^2-6x-2}{(x^2-1)^2}$

D. $\frac{2x^2-6x+2}{(x^2-1)^2}$

Câu 4. $y = (x+1)\sqrt{x^2+x+1}$.

A. $\frac{4x^2-5x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

B. $\frac{4x^2+5x-3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

C. $\frac{4x^2+5x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$

D. $\frac{4x^2+5x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

Bài 3. Tính đạo hàm các hàm số sau

Câu 1. $y = (x^7 + x)^2$

A. $y' = (x^7 + x)(7x^6 + 1)$

B. $y' = 2(x^7 + x)$

C. $y' = 2(7x^6 + 1)$

D. $y' = 2(x^7 + x)(7x^6 + 1)$

Câu 2. $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$

A. $y' = -x^3 + 4x$

B. $y' = -x^3 - 4x$

C. $y' = 12x^3 + 4x$

D. $y' = -12x^3 + 4x$

Câu 3. $y = \frac{2x}{x^2-1}$

A. $\frac{2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

B. $\frac{-2x^2+343}{(x^2-1)^2}$

C. $\frac{-2x^2-2}{(x^2+1)^2}$

D. $\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

Câu 4. $y = x^2(2x+1)(5x-3)$

A. $y' = 40x^2 - 3x^2 - 6x$

B. $y' = 40x^3 - 3x^2 - 6x$

C. $y' = 40x^3 + 3x^2 - 6x$

D. $y' = 40x^3 - 3x^2 - x$

Câu 5. $y = \left(4x + \frac{5}{x^2}\right)^3$

A. $y' = 3\left(4 + \frac{10}{x^3}\right)\left(4x + \frac{5}{x^2}\right)^2$

B. $y' = 3\left(4 - \frac{10}{x^3}\right)\left(4x - \frac{5}{x^2}\right)^2$

C. $y' = \left(4x + \frac{5}{x^2}\right)^2$

D. $y' = 3\left(4 - \frac{10}{x^3}\right)\left(4x + \frac{5}{x^2}\right)^2$

Câu 6. $y = (x+2)^3(x+3)^2$

A. $y' = 3(x^2+5x+6)^3 + 2(x+3)(x+2)^3$

B. $y' = 2(x^2+5x+6)^2 + 3(x+3)(x+2)^3$

C. $y' = 3(x^2+5x+6) + 2(x+3)(x+2)$

D. $y' = 3(x^2+5x+6)^2 + 2(x+3)(x+2)^3$

Câu 7. $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2}$

$$\text{A. } y' = \frac{3x^2 - 6x}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2}} \quad \text{B. } y' = \frac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2}} \quad \text{C. } y' = \frac{3x^2 - 6x}{2\sqrt{x^3 - 3x^2 - 2}} \quad \text{D. } y' = \frac{3x^2 - 6x}{2\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2}}$$

Câu 8. $y = x^2 + x\sqrt{x+1}$

$$\text{A. } y' = 2x + \sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{B. } y' = 2x - \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\text{C. } y' = \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{D. } y' = 2x + \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$$

Câu 9. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\text{A. } y' = -\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} \quad \text{B. } y' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} \quad \text{C. } y' = \frac{2a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} \quad \text{D. } y' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

Câu 10. $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$$\text{A. } y' = \frac{3}{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \quad \text{B. } y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{x}} \quad \text{C. } y' = \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \quad \text{D. } y' = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

Câu 11. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

$$\text{A. } y' = \frac{1-3x}{\sqrt{(1-x)^3}} \quad \text{B. } y' = \frac{1-3x}{3\sqrt{(1-x)^3}} \quad \text{C. } y' = -\frac{1}{3} \frac{1-3x}{2\sqrt{(1-x)^3}} \quad \text{D. } y' = \frac{1-3x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$$

Bài 4. Tìm m để các hàm số

Câu 1. $y = (m-1)x^3 - 3(m+2)x^2 - 6(m+2)x + 1$ có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{A. } m \geq 3 \quad \text{B. } m \geq 1 \quad \text{C. } m \geq 4 \quad \text{D. } m \geq 4\sqrt{2}$$

Câu 2. $y = \frac{mx^3}{3} - mx^2 + (3m-1)x + 1$ có $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{A. } m \leq \sqrt{2} \quad \text{B. } m \leq 2 \quad \text{C. } m \leq 0 \quad \text{D. } m < 0$$

Câu 3. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} + 3 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

$$\text{A. } f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{B. } f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x < 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{C. } f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{D. } f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Bài 5. Tìm a, b để các hàm số sau có đạo hàm trên \mathbb{R}

Câu 1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

A. $\begin{cases} a = 13 \\ b = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -11 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 23 \\ b = -21 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$

Câu 2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

A. $a = 0, b = 11$

B. $a = 10, b = 11$

C. $a = 20, b = 21$

D. $a = 0, b = 1$

Bài 6. Tính đạo hàm các hàm số sau

Câu 1. $y = (x^3 + 2x)^3$

A. $y' = (x^3 + 2x)^2(3x^2 + 2)$

B. $y' = 2(x^3 + 2x)^2(3x^2 + 2)$

C. $y' = 3(x^3 + 2x)^2 + (3x^2 + 2)$

D. $y' = 3(x^3 + 2x)^2(3x^2 + 2)$

Câu 2. $y = (x^2 - 1)(3x^3 + 2x)$

A. $y' = x^4 - 3x^2 - 2$

B. $y' = 5x^4 - 3x^2 - 2$

C. $y' = 15x^4 - 3x^2$

D. $y' = 15x^4 - 3x^2 - 2$

Câu 3. $y = \left(x + \frac{2}{3x^2}\right)^2$

A. $y' = \left(x + \frac{2}{3x^2}\right)\left(1 - \frac{4}{3x^3}\right)$

B. $y' = 2\left(x + \frac{2}{3x^2}\right)\left(1 + \frac{4}{3x^3}\right)$

C. $y' = \left(x + \frac{2}{3x^2}\right)\left(1 + \frac{4}{3x^3}\right)$

D. $y' = 2\left(x + \frac{2}{3x^2}\right)\left(1 - \frac{4}{3x^3}\right)$

Câu 4. $y = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1}$

A. $y' = \frac{x + 2\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1)}}$

B. $y' = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1)}}$

C. $y' = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2\sqrt{(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1)}}$

D. $y' = \frac{x + 2\sqrt{x^2 + 1}}{2\sqrt{(x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1)}}$

Bài 7. Giải bất phương trình :

Câu 1. $f'(x) \geq 0$ với $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

A. $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

B. $x \leq 1$

C. $x \geq 0$

D. $0 \leq x \leq 1$

Câu 2. $f'(x) < 0$ với $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1$

A. $\begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$

B. $-1 < x < 0$

C. $x > 1$

D. $x < 0$

Câu 3. $2xf'(x) - f(x) \geq 0$ với $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

A. $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

B. $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$

C. $x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

D. $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Câu 4. $f'(x) > 0$ với $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$.

A. $-2 \leq x \leq \sqrt{2}$

B. $x \leq \sqrt{2}$

C. $-2 \leq x$

D. $x < 0$