ĐẠO HÀM

LÝ THUYẾT CẦN NẮM VỮNG

1. **Định nghĩa đạo hàm**
2. **Đạo hàm một bên.**
3. **Cách tính đạo hàm bằng Định nghĩa (Quy tắc)**
4. **Định lý 1 (Mối quan hệ giữa đạo hàm và tính liên tục của hàm số)**
5. **Ý nghĩa hình học và ý nghĩa vật lý của đạo hàm**
6. **Đạo hàm trên một khoảng**

BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm số gia của hàm số

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để tính số gia của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng với số gia Δx cho trước ta áp dụng công thức tính sau: $\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$

B. BÀI TẬP MẪU

1 Tìm số gia của hàm số $y = 2x^2 - 3x + 5$, tương ứng với sự biến thiên của đối số:

a) Từ $x_0 = 1$ đến $x_0 + \Delta x = 2$ b) Từ $x_0 = 2$ đến $x_0 + \Delta x = 0,9$

c) Từ $x_0 = 1$ đến $x = 1 + \Delta x$ d) Từ $x_0 = 2$ đến $x = 2 + \Delta x$

2 Tính Δy và $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số sau theo x và Δx:

a) $y = 3x - 5$ b) $y = 3x^2 + 7$ c) $y = 2x^2 + 4x - 1$ d) $y = \cos 2x$

3 Bài tập số 1,2 SGK trang 156

Dạng 2. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa ta làm như sau:

- ***Cách 1***:
  - ✓ *Cho x_0 một số gia Δx và tìm số gia $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$*
  - ✓ *Tập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$*
  - ✓ *Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Nếu:*
    - ✦ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số có đạo hàm là* $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
    - ✦ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *không tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số không có đạo hàm.*
- ***Cách 2***:
  - ✓ *Tính* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
    - ✦ *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm số có đạo hàm là* $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

✦ *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *không tồn tại hữu hạn thì tại* x_0 *hàm số không có đạo hàm.*

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ:

1. $f(x)=2x^3+1$ tại $x=2$ **3.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

2. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ tại $x=1$

Lời giải:

1. Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}2(x^2+2x+4)=24\Rightarrow f'(2)=24$.

2. Ta có : $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Ta có $f(0)=0$, do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+|x+1|}{x-1}$ liên tục tại $x=-1$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải:

Vì hàm $f(x)$ xác định tại $x=-1$ nên nó liên tục tại đó.

Ta có: $f'(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x}{x-1}=1$

$f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}2=2$

$\Rightarrow f'(-1^+)\neq f'(-1^-)\Rightarrow f(x)$ không có đạo hàm tại $x=-1$.

Ví dụ 3. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$

Lời giải:

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x=1$

Hay $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=f(1)=a$.

Khi đó, ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$.

Vậy $a=2$ là giá trị cần tìm.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập số 3 SGK trang 156

Bài 1 Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra

Câu 1. $f(x)=2x+1$ tại $x_0=1$

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 2. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x_0=2$

A. -2 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 3. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ tại điểm $x_0=2$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$ **C.** $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{41}$

Câu 4. $f(x)=\sin^2 x$ tại $x=\dfrac{\pi}{2}$

A. 0 **B.1** **C.2** **D.3**

Câu 5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{5}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

Bài 2 Tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm chỉ ra

Câu 1. $f(x)=\sin 2x$ tại $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

A. -1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 2. $f(x)=\tan x$ tại $x=\dfrac{\pi}{4}$

A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 31

Câu 3. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

A. 0 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** 7

Bài 3 Tính đạo hàm các hàm số sau tại các điểm chỉ ra

Câu 1. $f(x)=x^3$ tại $x_0=1$

A. 4 **B.** 3 **C.** 5 **D.**6

Câu 2. $f(x)=\begin{cases}2x+3 & khi\ x\ge 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại $x_0=1$.

A. 0 **B.** 4 **C.** 5 **D.** Đáp án khác

Câu 3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x>0\\ x+x^2 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ tại $x_0=0$

A.1 **B.2** **C.3** **D.5**

Câu 4. $f(x)=\dfrac{x^2+|x+1|}{x}$ tại $x_0=-1$.

A.2 **B.0** **C.3** **D.**đáp án khác

Bài 4

Câu 1. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & khi\ \ x\ge 1\\ ax+b & khi\ x<1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

A. $\begin{cases}a=23\\ b=-1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=3\\ b=-11\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=33\\ b=-31\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}$

Câu 2. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & khi\ x\ge 0\\ 2x^2+ax+b & khi\ x<0\end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $a=10,b=11$ **B.** $a=0,b=-1$ **C.** $a=0,b=1$ **D.** $a=20,b=1$

Câu 3. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{khi } x\ge 0\\ ax+b & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. $a=-11,b=11$ **B.** $a=-10,b=10$ **C.** $a=-12,b=12$ **D.** $a=-1,b=1$

Dạng 3. Quan hệ giữa liên tục và đạo hàm

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Mối quan hệ giữa liên tục và đạo hàm ta cần nhớ các kết luận sau:

- $f(x)$ *liên tục tại* x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$
- $f(x)$ *có đạo hàm tại* x_0 $\Rightarrow f(x)$ *liên tục tại* x_0
- $f(x)$ *liên tục tại* x_0 ***chưa chắc*** $f(x)$ *có đạo hàm tại* x_0

B. BÀI TẬP

4.1 Chứng minh rằng hàm số $y=\dfrac{x^2-2|x+3|}{3x-1}$ liên tục tại $x=-3$ nhưng không có đạo hàm tại điểm ấy.

4.2 Cho hàm số: $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & khi \quad x\neq 0\\ 0 & khi \quad x=0\end{cases}$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$.

b) Tính đạo hàm (nếu có) của $f(x)$ tại điểm $x_0=0$.

4.3 Cho hàm số: $y=f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & khi \quad x\neq 0\\ 0 & khi \quad x=0\end{cases}$

a) Tính đạo hàm của hàm số tại mỗi $x\in\mathbb{R}$.

b) Chứng tỏ rằng đạo hàm $f'(x)$ không liên tục tại điểm $x_0=0$.

Dạng 4. Tiếp tuyến

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

❖ ***Sử dụng ý nghĩa hình học của đạo hàm***

✓ ***Hệ số góc*** *k của cát tuyến MN với đường cong $(C): y=f(x)$, biết M, N theo thứ tự có hoành độ là x_M, x_N được cho bởi:* $\boxed{k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_N-y_M}{x_N-x_M}}$ *với $x_N\neq x_M$*

✓ *$f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong (C) tại $M(x_0;f(x_0))$*

❖ ***Tiếp tuyến của đồ thị***

1. <u>Tiếp tuyến tại một điểm:</u>

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;\, y_0)$:

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$$

<u>Trong đó</u>: - *$M_0(x_0;\, y_0)$ gọi là tiếp điểm.*

- *$k=f'(x_0)$ là hệ số góc.*

<u>Các chú ý</u>: - *Nếu cho x_0 thì thế vào $y=f(x)$ tìm y_0.*

- *Nếu cho y_0 thì thế vào $y=f(x)$ tìm x_0.*

2 <u>Tiếp tuyến đi qua một điểm:</u>

Để lập phương trình tiếp tuyến d với (C) biết d đi qua $A(x_A;\, y_A)$:

<u>Cách 1</u>: - *Gọi $M_0(x_0;\, y_0)$ là tiếp điểm.*

- *Phương trình đường thẳng d qua M_0 với hệ số góc $k=f'(x_0)$:*

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

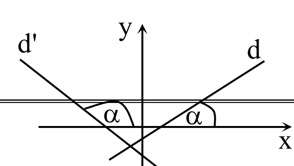
- $A(x_A;y_A)\in d\Rightarrow y_A-y_0=f'(x_0)(x_A-x_0)$

- *Giải pt trên tìm x_0, tìm $f'(x_0)$, thế vào $y=f(x)$ tìm y_0.*

<u>Cách 2</u>: *Dùng điều kiện tiếp xúc (Sẽ học ở lớp 12)*

3. <u>Tiếp tuyến biết hệ số góc:</u>

- *Giải phương trình: $f'(x)=k\Rightarrow$ các hoành độ tiếp điểm.*
- *Thế vào $y=f(x)$ để tìm tung độ.*
- *Viết tiếp tuyến: $y-y_0=k.(x-x_0)$*



✍ ***Chú ý:***

- *tiếp tuyến* $d // \Delta : y = ax + b \Rightarrow k = a$
- *tiếp tuyến* $d \perp \Delta : y = ax + b \Rightarrow k.a = -1$
- $k = tan\alpha$*, với* α *là góc giữa* d *với tia* Ox.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tấp số 5, 6 trang 156

4.1 Cho Parabol $y = x^2$ và hai điểm $A(2;\ 4)$ và $B(2+\Delta x;\ 4+\Delta y)$ trên parabol đó.

a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết Δx lần lượt bằng $1;\ 0,1$ và $0,001$.

b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A.

4.2 Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C), biết:

a) $(C): y = x^2 - 2x$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 2,\ x_N = 1$.

b) $(C): y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 1,\ x_N = 3$.

4.3 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng -1.

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 8.

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

4.4 Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \dfrac{1}{x}$, biết:

a) Tại điểm $\left(\dfrac{1}{2};\ 2\right)$. b) Tiếp điểm có hoành độ bằng -1. c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\dfrac{1}{4}$.

Dạng 5. Ý nghĩa Vật lí của đạo hàm

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cần nhớ các kết quả sau:

✓ *Nếu một chất điểm chuyển động với phương trình* $s = s(t)$ *thì* ***vận tốc tức thời*** *của chất điểm đó tại thời điểm* t_0 *là* $v(t_0) = s'(t_0)$

✓ *Một dòng điện có điện lượng là* $Q = Q(t)$ *thì* ***cường độ tức thời*** *của dòng điện tại thời điểm* t_0 *là* $I(t_0) = Q'(t_0)$

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập số 7 SGK trang 157

5.1 Một viên đạn được bắn lên từ vị trí M cách mặt đất $1m$, theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $v_0 = 196\text{m/s}$ (bỏ qua sức cản của không khí)

a) Tìm thời điểm t_0 mà tại đó vận tốc của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét ?

b) Sau khoảng bao nhiêu giây (kể từ lúc bắn) viên đạn rơi xuống mặt đất ? (lấy $g = 9,8\ m/s^2$)

5.2 Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8\ m/s^2$ và t được tính bằng giây.

a) Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác đến $0,001$, biết Δt lần lượt nhận các giá trị $0,1;\ 0,01;\ 0,001$.

b) Tìm vận tốc tại thời điểm $t = 5$ giây.